ÉCOLE NATIONALE DES INGÉNIEURS DES TRAVAUX RURAUX ET DES TECHNIQUES SANITAIRES
STRASBOURG

CONCOURS D'ENTRÉE 1980

OPTION PHYSIQUE-MATHÉMATIQUES

DEUXIEME ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée : 3 heures

N.B. Ce sujet comporte 2 pages de texte.

L'espace affine euclidien de dimension 3 est rapporté à un repère orthonormé, $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. Tout point de l'espace est repéré, soit par ses coordonnées cartésiennes (x,y,z), soit par ses coordonnées semi-polaires (r,θ,z) telles que

$$x\vec{i} + y\vec{j} = r\vec{u} \qquad \text{avec} \qquad \vec{u} = \vec{i}\cos\theta + \vec{j}\sin\theta.$$

On pose $\vec{v} = -\vec{i}\sin\theta + \vec{j}\cos\theta$.

Dans tout le problème, a désigne un nombre positif donné non nul et A le point de coordonnées cartésiennes $(a,0,0)$. Toutes les fonctions envisagées dans le problème sont supposées de classe C^1 sur leur domaine de définition.

I

(C) étant un arc géométrique de classe C^1 dans le plan $(O,\vec{i},\vec{j})$, on désigne par $\vec{t}$ un vecteur unitaire de la tangente à (C) en un point P et par V l'angle $(\vec{u},\vec{t})$ tels que

$$\vec{OP} = r\,\vec{u} \qquad \text{et} \qquad \vec{u} = \vec{i}\cos\theta + \vec{j}\sin\theta$$

1°) a) Soit f(r) une fonction donnée de r. On considère les courbes du plan telles que
- elles ne passent pas par O ;
- en tout point où la tangente de l'angle V est définie, on a la relation $\mathrm{tg}V = f(r)$.

Montrer que ces courbes se déduisent de l'une d'entre elles par des transformations géométriques simples.

b) Déterminer et construire la courbe (C_1) qui passe par le point A lorsque

$$\mathrm{tg}V = \left(2\,\frac{r}{a} - 1\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

2°) a) Soit $g(\theta)$ une fonction donnée de θ. On considère les courbes du plan telles que
- elles ne passent par par O ;
- en tout point où la tangente de l'angle V est définie on a la relation $\mathrm{tg}V = g(\theta)$.

Tournez la page S. V. P.

Montrer que ces courbes se déduisent de l'une d'entre elles par des transfo mations géométriques simples.

b) Déterminer l'équation polaire de la courbe (C_2) qui passe par le point A lorsque

$$\text{tg}V = -\coth\theta$$

Etudier cette courbe et la tracer en prenant a = 5 cm.

II

Le point P qui parcourt la courbe (C_2) étudiée à la question précédente est la projection orthogonale sur le plan $(O,\vec{i},\vec{j})$ d'un point M de cote $z = a\varphi(\theta)$.
Soit (Γ) la courbe décrite par ce point M lorsque θ varie et soit $\vec{T}$ un vecteur unitaire de la tangente à (Γ) en M.

1°) Déterminer la fonction $\varphi(\theta)$ sachant que l'angle $(\vec{v},\vec{T})$ est constant et égal à $\frac{\pi}{4}$ ou $\frac{3\pi}{4}$ suivant l'orientation de $\vec{T}$, que, pour $\theta = 0$, le point M est en A et que z est positif lorsque θ est positif.

2°) Montrer que la courbe (Γ) est tracée sur une sphère. Indiquer sommairement la forme de (Γ).

3°) Calculer la longueur de l'arc AM de cette courbe. Montrer que cette longueur admet une limite lorsque l'angle polaire θ tend vers l'infini et calculer cet limite.

III

Soit M un point mobile de l'espace. A l'instant t = 0, ce point coïncide av le point A et son vecteur vitesse a pour composantes (0,a,a) dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}$
Le mouvement de M est tel que :

(i) La trajectoire de M est située sur la sphère S de centre O et de rayon a ;

(ii) Le mouvement projeté sur l'axe Oz est uniforme ;

(iii) Le mouvement projeté sur le plan $(O,\vec{i},\vec{j})$ est à accélération centrale, de centr

1°) Calculer, en fonction du temps t, l'angle polaire θ de M qui est nul à l'instant t = 0. En déduire les coordonnées semi-polaires de M en fonction de l'ar gle θ .

Déterminer le vecteur vitesse de M et calculer sa vitesse numérique (on supposera la trajectoire orientée positivement dans le sens des θ croissants).

Montrer que la trajectoire de M coupe sous un angle constant les cercles de la sphère S ayant pour axe Oz.

Décrire le mouvement de M pour tout $t \geqslant 0$.

2°) Déterminer le vecteur accélération de M. Exprimer sa norme en fonction de r. Calculer le rayon de courbure en un point de la trajectoire.

---

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail